ISSN 1997-0854 (Print), 2587-6341 (Online) DOI: 10.33779/2587-6341.2020.3.017-023
УДК 781.1

С. С. НИКОЛЬСКИЙ
г. Санкт-Петербург, Россия
ORCID: 0000-0002-4535-4254, vnikol91@rambler.ru

Музыкальные звукоряды с пифагоровыми интервалами

В статье рассматриваются арифметические свойства неравномерно темперированных музыкальных звукорядов с элементарными интервалами, имеющими ширину 0,98045 полутона («уменьшённый» полутон) и 1,01955 полутона («увеличенный» полутон). Показано, что любой интервал, являющийся суммой либо разностью целого числа чистых квинт и целого числа чистых октав (иначе говоря, любой пифагоров интервал), может быть представлен как сумма уменьшённых и увеличенных полутонов. Так, большая пифагорова секунда равна сумме двух увеличенных полутонов, малая пифагорова терция равна сумме трёх уменьшённых полутонов, большая пифагорова терция равна сумме четырёх увеличенных полутонов, чистая кварта равна сумме трёх уменьшённых и двух увеличенных полутонов и т. п. Таким образом, с использованием уменьшённого и увеличенного полутонов в качестве элементарных интервалов звукоряда возникает возможность строить музыкальные звукоряды, содержащие, кроме октавы, также и иные пифагоровы интервалы.

Ключевые слова: музыкальные интервалы, музыкальный звукоряд, настройка фортепиано.

Для цитирования / For citation: Никольский С. С. Музыкальные звукоряды с пифагоровыми интервалами // Проблемы музыкальной науки / Music Scholarship. 2020. № 3. С. 17–23. DOI: 10.33779/2587-6341.2020.3.017-023.

SERGEI S. NIKOLSKY
St. Petersburg, Russia
ORCID: 0000-0002-4535-4254, vnikol91@rambler.ru

Musical Scales with Pythagorean Intervals

The article examines the arithmetical qualities of musical scales tuned unequally with elementary intervals of the breadth of 0.98045 of a semitone (a “diminished” semitone) and 1.01955 of a semitone (an “augmented” semitone). It is demonstrated that each interval comprising a sum or a variety of a whole number of perfect fifths and the whole number of perfect octaves (in other words, a Pythagorean interval) may be presented as a sum of diminished and augmented semitones. Thereby, the Pythagorean major second is equal in sum to three augmented semitones, a minor Pythagorean third is equal in sum to two diminished semitones, a major Pythagorean third is equal in sum to four augmented semitones, a perfect fourth is equal in sum to three diminished and two augmented semitones, etc. Thereby, with the use of diminished and augmented semitones as elementary intervals of the scale the opportunity arises to build musical scales containing other Pythagorean intervals, besides the octave.

Keywords: musical intervals, musical scales, tuning the piano.

В центре внимания данной статьи – неравномерно темперированные музыкальные звукоряды, содержащие, кроме октав, также и другие пифагоровы интервалы. По ходу изложения будут использоваться следующие формулировки. Два звука, различающиеся по высоте, образуют то, что называется *музыкальным интервалом*. Звук с более низкой частотой f_1 называют *основанием* музыкального интервала, а звук с более высокой частотой f_2 – *вершиной* этого интервала. Превышающее единицу безразмерное отношение $r = f_2 : f_1$, называется *частотным соотношением музыкального интервала*. Наряду с частотным соотношением, при количественном описании музыкальных интервалов используется также *ширина интервала* w, представляющая собой логарифмическую функцию от r и описываемая уравнением

$$w(r) = 12\,(\log 2)^{-1} \log r \qquad (1).$$

Основание логарифмов в формуле (1) может быть любым положительным числом кроме единицы.

Уравнение (1) написано для случаев, когда w выражено в *полутонах*. Полутоном, выполняющим роль единицы измерения ширины музыкальных интервалов, является интервал, равный двенадцатой доле интервала октавы и имеющий частотное соотношение, равное $2^{1/12} = 1{,}0594631$.

Функцией, *обратной* относительно логарифмической функции (1), является показательная функция

$$r\,(w) = 2^{w/12.} \qquad (2).$$

Уравнения (1) и (2) выражают одну и ту же функциональную зависимость между r и w, что доказывается логарифмированием левой и правой частей уравнения (2), которое при этом превращается в уравнение (1).

Если вершина одного интервала является основанием другого интервала, то значения ширины этих интервалов можно суммировать. Частотное соотношение интервала, образующегося в результате такого суммирования, равно произведению частотных соотношений суммируемых интервалов. При суммировании n равных по величине интервалов умножение частотных соотношений заменяется возведением в n-ю степень. При разделении интервала на n равных частей из частотного соотношения этого интервала извлекается корень n-й степени.

Пифагоровы интервалы – это интервалы, частотные соотношения которых описываются уравнением общего вида

$$r = 2^{\,g} * 3^{\,h} \qquad (3),$$

где g и h – целые числа, могущие быть положительными или отрицательными. Сумма пифагоровых интервалов также является пифагоровым интервалом. Более подробная информация о пифагоровых интервалах представлена в таблице 1.

Простые интервалы – это интервалы, ширина которых не превышает одной октавы. *Обращение* простого интервала – это интервал, дополняющий данный простой интервал до одной октавы. Обращение пифагорова интервала также является пифагоровым интервалом.

Пифагорова комма – это интервал, образующийся при вычитании суммы семи пифагоровых интервалов октавы (каждый из которых имеет $r = 2$) из суммы двенадцати пифагоровых интервалов квинты (каждый из которых имеет $r = 3/2$). Отсюда получаем частотное соотношение пифагоровой коммы, равное $(3/2)^{12} : 2^7 = 1{,}013643$. Подставив это численное значение r в уравнение (1), получаем ширину пифагоровой коммы, равную 0,2346 полутона.

Схизма – это интервал, равный двенадцатой доле интервала пифагоровой коммы. Ширина схизмы равна 0,2346 : 12 = 0,01955 полутона.

Музыкальный звукоряд – это возрастающая по высоте последовательность звуковых частот и соответствующих этим частотам музыкальных звуков, называемых *ступенями* данного звукоряда. Музыкальный звукоряд является счётным множеством, т. е. такой последовательностью, члены которой могут быть пронумерованы.

Элементарные интервалы музыкального звукоряда – это интервалы между ближайшими по отношению друг к другу ступенями музыкального звукоряда.

Если ширина каждого из элементарных интервалов звукоряда равна одному полутону, то мы имеем последовательность частот, известную как *равномерно темперированный хроматический звукоряд*. Этот звукоряд является геометрической прогрессией частот, связанных между собой равенствами вида $f_{k+1} = 2^{1/12} f_k$, где f_k и f_{k+1} – любые две частоты (предшествующая и последующая), принадлежащие звукоряду и отстоящие друг от друга на один элементарный интервал, ширина которого равна одному полутону.

За исключением интервала октавы, интервалы равномерно темперированного звукоряда имеют частотные соотношения в виде иррациональных чисел, тогда как частотные соотношения пифагоровых интервалов являются отношениями целых чисел. Покажем, что это несоответствие может быть устранено, если заменить геометрическую прогрессию частот более сложным законом, согласно которому ширина элементарных интервалов звукоряда имела бы не одно, а два численных значения. В связи с этим введём два интервала, которые будем кратко называть уменьшенным и увеличенным полутонами.

Уменьшённый полутон определим как полутон, уменьшённый на одну схизму и имеющий ширину, равную 1 – 0,2346 : 12 = 0,98045 полутона. Частотное соотношение уменьшённого полутона, в дальнейшем обозначаемое как a, равно

$$a = 2^{1/12} : ((3/2)^{12} : 2^7)^{1/12} = 2^{5/3} : 3 = 1{,}05826737.$$

Увеличенный полутон определим как полутон, увеличенный на одну схизму и имеющий ширину, равную 1 + 0,2346 : 12 = 1,01955 полутона. Частотное соотношение увеличенного полутона, в дальнейшем обозначаемое как b, равно

$$b = 2^{1/12} * ((3/2)^{12} : 2^7)^{1/12} = 3 : 2^{3/2} = 1{,}06066017.$$

Таблица 1. Численные данные, относящиеся к пифагоровым интервалам

1	2	3	4	5
пифагоров интервал	g	h	r по ф. (3)	r по ф. (5)
б. секунда	-3	2	9 : 8	b^2
м. терция	5	-3	32 : 27	a^3
б. терция	- 6	4	81 : 64	b^4
кварта	2	-1	4 : 3	$a^3 b^2$
ум. тритон	10	- 6	1024 : 729	a^6
ув. тритон	- 9	6	729 : 512	b^6
квинта	-1	1	3 : 2	$a^3 b^4$
м. секста	7	- 4	128 : 81	$a^6 b^2$
б. секста	- 4	3	27 : 16	$a^3 b^6$
м. септима	4	- 2	16 : 9	$a^6 b^4$
октава	1	0	2 : 1	$a^6 b^6$

Допустим, что существуют четыре числа a, b, g, h, связанные равенством

$$a^{6g+9h}\, b^{6g+10h} = 2^g * 3^h. \qquad (4)$$

При подстановке выражений $a = 2^{5/3} : 3$ и $b = 3 : 2^{3/2}$ в левую часть равенства (4) последнее превращается в тождество $2^g * 3^h = 2^g * 3^h$, выполняющееся при любых, включая отрицательные, численных значениях g и h. Поэтому правую часть равенства (4) можно рассматривать, в соответствии с формулой (3), как частотное соотношение r некоего пифагорова интервала, являющегося суммой $6g + 9h$ уменьшённых полутонов и $6g + 10h$ увеличенных полутонов и выражаемое формулой:

$$r = a^{6g+9h}\, b^{6g+10h} \qquad (5).$$

Приравнивая друг другу правые части равенств (3) и (5) и заменяя g и h численными значениями, взятыми из столбцов 2 и 3 таблицы 1, получаем следующие равенства, представляющие пифагоровы интервалы в виде сумм уменьшённых и увеличенных полутонов: большая пифагорова секунда ($r = 9 : 8$) равна сумме двух увеличенных полутонов ($r = b^2$); малая пифагорова терция (r = 32 : 27) равна сумме трёх уменьшённых полутонов ($r = a^3$); большая пифагорова терция ($r = 81 : 64$) равна сумме четырёх увеличенных полутонов ($r = b^4$); пифагорова кварта ($r = 4 : 3$) равна сумме трёх уменьшённых и двух увеличенных полутонов ($r = a^3b^2$); малый пифагоров тритон ($r = 1024 : 729$) равен сумме шести уменьшённых полутонов ($r = a^6$); большой пифагоров тритон ($r = 729 : 512$) равен сумме шести увеличенных полутонов ($r = b^6$); пифагорова квинта ($r = 3 : 2$) равна сумме трёх уменьшённых и четырёх увеличенных полутонов ($r = a^3b^4$); малая пифагорова секста ($r = 128 : 81$) равна сумме шести уменьшённых и двух увеличенных полутонов ($r = a^6b^2$); большая пифагорова секста ($r = 27 : 16$) равна сумме трёх уменьшённых и шести увеличенных полутонов ($r = a^3b^6$); малая пифагорова септима ($r = 16 : 9$) равна сумме шести уменьшённых и четырёх увеличенных полутонов ($r = a^6b^4$); октава ($r = 2 : 1$) равна сумме шести уменьшённых и шести увеличенных полутонов ($r = a^6b^6$).

Предметом нашего дальнейшего рассмотрения будет неравномерно темперированный звукоряд, построенный с соблюдением следующих условий: все элементарные интервалы звукоряда являются уменьшёнными и увеличенными полутонами; любой интервал, принадлежащий звукоряду и равный одной октаве, является суммой двенадцати элементарных интервалов, из которых шесть интервалов являются уменьшёнными полутонами, а шесть интервалов – увеличенными полутонами. Частотное соотношение интервала между любыми двумя ступенями рассматриваемого звукоряда описывается формулой:

$$r = a^m\, b^n \qquad (6),$$

где m и n – два целых неотрицательных числа, равные числу уменьшённых полутонов и числу увеличенных полутонов, содержащихся в данном интервале. Ограничимся случаями, когда интервалы, описываемые формулой (6), являются простыми, т. е. не превышают одной октавы. В этих случаях каждое из чисел m и n не превышает числа 6. В числе интервалов, принадлежащих рассматриваемому звукоряду, будут пифагоровы интервалы. Приведём несколько примеров:

– если звукоряд содержит уменьшённые и увеличенные полутоны, чередующиеся по схеме …*abababababab*…, то каждая ступень, принадлежащая звукоряду, образует с двумя другими ступенями звукоряда один интервал пифагоровой кварты ($r = ababa$) и один интервал пифагоровой квинты ($r = bababab$),

– если два увеличенных полутона расположены в звукоряде подряд, то в сумме они образуют большую пифагорову секунду ($r = bb$),

– если три уменьшённых полутона расположены в звукоряде подряд, то в сумме они образуют малую пифагорову терцию ($r = aaa$),

– если четыре увеличенных полутона расположены в звукоряде подряд, то в сумме они образуют большую пифагорову терцию ($r = bbbb$), и т. п.

Выделим из рассматриваемого звукоряда фрагмент шириной в одну октаву, содержащий 6 уменьшённых полутонов и 6 увеличенных полутонов. Назовём этот фрагмент *зоной темперации звукоряда*. Порядок следования шести

Таблица 2. Частоты трёх вариантов хроматического звукоряда в промежутке между ля малой октавы и ля второй октавы

1	2	3	4
названия ступеней .. звукоряда	частоты (*Гц*) звукоряда, построенного по мотиву *bbaaabbbbaaa*	частоты (*Гц*) звукоряда, построенного по мотиву *bbbbaaaaaabb*	частоты (*Гц*) равномерно темперированного звукоряда
ля	**220,00**	**220,00**	**220,00**
ля диез	220*b* = 233,34	220*b* = 233,34	220 * $2^{1/12}$ = 233,08
си	220*bb*= **247,50**	220*bb* = **247,50**	220 * $2^{2/12}$ =**246,94**
до^{1}	220*bba* = **261,92**	220*bbb* = **262,51**	220 * $2^{3/12}$ = **261,62**
до диез^{1}	220*bbaa* = 277,18	220*bbbb* = 278,44	220 * $2^{4/12}$ = 277,18
ре^{1}	220*bbaaa* = **293,33**	220*bbbba* = **294,66**	220 * $2^{5/12}$ = **293,66**
ре диез^{1}	220*bbaaab* = 311,13	220*bbbbaa* = 311,83	220 * $2^{6/12}$ = 311,12
ми^{1}	220*bbaaabb* = **330,00**	220*bbbbaaa* = **330,00**	220 * $2^{7/12}$ = **329,62**
фа^{1}	220*bbaaabbb* =**350,02**	220*bbbbaaaa* = **349,23**	220 * $2^{8/12}$ = **349,23**
фа диез^{1}	220*bbaaabbbb* =371,25	220*bbbbaaaaa* = 369,58	220 * $2^{9/12}$ = 369,99
соль^{1}	220*bbaaabbbba* = **392,88**	220*bbbbaaaaaa* = **391,11**	220 * $2^{10/12}$ = **391,99**
соль диез^{1}	220*bbaaabbbbaa* = **415,77**	220*bbbbaaaaaab* = **414,84**	220 * $2^{11/12}$ = **415,30**
ля^{1}	220*bbaaabbbbaaa* = **440,00**	220*bbbbaaaaaabb* = **440,00**	220 * $2^{12/12}$ = **440,00**
ля диез^{1}	440*b* = 466,69	440*b* = 466,69	440 * $2^{1/12}$ = 466,16
си^{1}	440*bb* = **495,00**	440*bb* = **495,00**	440 * $2^{2/12}$ = **493,88**
до^{2}	440*bba* = **523,84**	440*bbb* = **525,03**	440 * $2^{3/12}$ = **523,25**
до диез^{2}	440*bbaa* = 554,36	440*bbbb* = 556,87	440 * $2^{4/12}$ = 554,36
ре^{2}	440*bbaaa* = **586,67**	440*bbbba* = **589,32**	440 * $2^{5/12}$ = **587,33**
ре диез^{2}	440*bbaaab* = 622,25	440*bbbbaa* = 623,66	440 * $2^{6/12}$ = 622,25
ми^{2}	440*bbaaabb* = **660,00**	440*bbbbaaa* = **660,00**	440 * $2^{7/12}$ = **659,25**
фа^{2}	440*bbaaabbb* = **700,03**	440*bbbbaaaa* = **698,46**	440 * $2^{8/12}$ = **698,45**
фа диез^{2}	440*bbaaabbbb* = 742,50	440*bbbbaaaaa* = 739,15	440 * $2^{9/12}$ = 739,99
соль^{2}	440*bbaaabbbba* = **785,76**	440*bbbbaaaaaa* = **782,22**	440 * $2^{10/12}$ = **783,99**
соль диез^{2}	440*bbaaabbbbaa* = 831,55	440*bbbbaaaaaab* = 829,67	440 * $2^{11/12}$ = 830,61
ля^{2}	440*bbaaabbbbaaa* = **880,00**	440*bbbbaaaaaabb* = **880,00**	4400 * $2^{12/12}$ = **880,00**

уменьшённых и шести увеличенных полутонов, соблюдаемый в пределах зоны темперации звукоряда, назовём *мотивом* этого звукоряда. Для двенадцати ступеней хроматического звукоряда, находящихся в зоне темперации и образующих мотив звукоряда, введём названия *ля, ля#, си, до, до#, ре, ре#, ми, фа, фа#, соль, соль#*. Будем считать, что зона темперации находится между ступенями ля первой октавы с частотой 440 *Гц* и ля второй октавы с частотой 880 *Гц*.

Информацию о порядке следования уменьшённых и увеличенных полутонов представим в виде структурной формулы, содержащей шесть раз букву *a* и шесть раз букву *b*, порядок следования которых совпадает с порядком следования уменьшённых и увеличенных полутонов в зоне темперации. Например, если звукоряд построен по мотиву *bbbbaaaaaabb*, то из 12 элементарных интервалов, в сумме равных одной октаве, 4 интервала (*ля,ля#*), (*ля#,си*), (*си,до*), (*до,до#*) и 2 интервала (*соль,соль#*), (*соль#,ля*), будут увеличенными полутонами, а 6 интервалов (*до#,ре*), (*ре,ре#*), (*ре#,ми*), (*ми,фа*), (*фа,фа#*), (*фа#, соль*) будут уменьшёнными полутонами.

Число возможных вариантов мотива равно числу перестановок с повторениями шести объектов одного вида и шести объектов другого вида, равному (12!) : (6! 6!), или 924. Любой из этих 924 вариантов может быть использован для построения конкретного хроматического звукоряда, как это показано в столбцах 2 и 3 таблицы 2.

Зная частоту, сопутствующую одной из конкретных ступеней звукоряда (в нашем случае это стандартная частота 440 *Гц* , сопутствующая ступени ля первой октавы) и частотные соотношения всех элементарных интервалов, можно рассчитать, шаг за шагом, все частоты, образующие сколь угодно длинный звукоряд. Пусть f_k и f_{k+1} – две ближайшие по отношению друг к другу частоты, принадлежащие звукоряду, причём предыдущая частота f_k известна. Неизвестную частоту f_{k+1} , следующую после известной частоты f_k, можно найти по формуле

$$f_{k+1} = r f_k ,$$

где r – частотное соотношение элементарного интервала между частотами f_k и f_{k+1}. В случае звукоряда с уменьшёнными и увеличенными полутонами это соотношение будет равно либо a = 1,05826737, либо b =1,06066017 в соответствии с мотивом звукоряда. Построение такого звукоряда с использованием мотива показано на примере двух звукорядов, имеющих мотивы *bbaaabbbbaaa* и *bbbbaaaaaabb* (см.столбцы 2 и 3 таблицы 2).

В столбце 4 таблицы 2 даны, для сравнения, также частоты равномерно темперированного звукоряда, являющиеся членами геометрической прогрессии.

Обозначения, выделенные в таблице 2 жирным шрифтом, относятся к гамме *до мажор*, образуемой из хроматического звукоряда при исключении из него определённых ступеней, в данном случае – ступеней, сопряжённых с чёрными клавишами фортепианной клавиатуры.

В заключение остановимся на звукорядах, содержащих 6 уменьшенных полутонов подряд и 6 увеличенных полутонов подряд. В таких случаях образуется звукоряд, в котором последовательность уменьшенных и увеличенных полутонов имеет вид …*aaaaaabbbbbbaaaaaabbbbbb*…

В случае, основанном на мотиве bbbbaaaaaabb (см. столбец 3 таблицы 2), образуется звукоряд, в котором последовательность уменьшённых и увеличенных полутонов представляется аналогичным образом. Такой звукоряд будет содержать интервалы малого пифагорова тритона с частотным соотношением, равным *aaaaaa* = 1024:729 = 1,4046, и интервалы большого пифагорова тритона с частотным соотношением, равным *bbbbbb* = 729:512 = 1,4238.

Общеизвестный диссонантный равномерно темперированный тритон, равный половине интервала октавы и имеющий частотное соотношение, равное $2^{1/2}$=1,4142, является неточным воспроизведением этих двух пифагоровых интервалов, один из которых равен сумме шести уменьшённых полутонов, а другой – сумме шести увеличенных полутонов.

Данные, представленные в столбце 3 таблицы 2, показывают, что в случае, когда звукоряд подчиняется мотиву *bbbbaaaaaabb*, основанием малого пифагорова тритона будет ступень *до диез* первой октавы с частотой 278,44 *Гц*, а его вершиной – ступень соль первой октавы с частотой 391,11 *Гц*.

Обращением малого пифагорова тритона является большой пифагоров тритон. В нашем случае основанием этого интервала будет ступень *соль* первой октавы с частотой 391,11 *Гц*, а его вершиной – ступень *до диез* второй октавы с частотой 556,87 *Гц*.

Всего имеются 12 вариантов хроматического звукоряда, содержащего интервалы малого и большого пифагоровых тритонов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арбонес Х., Милруд П. Числа – основа гармонии. Музыка и математика. М.: Де Агостини, 2014. 160 с.

2. Должанский А. Н. Краткий музыкальный словарь. Л.: Музгиз, 1955. 511 с.

3. Павлюченко С. А. Краткий музыкальный словарь. М.: Музгиз, 1950. 192 с.

4. Пифагоров строй. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Пифагоров_строй (дата обращения: 13.08.2020).

Об авторе:

Никольский Сергей Степанович, кандидат химических наук (190000, г. Санкт-Петербург, Россия), **ORCID: 0000-0002-4535-4254**, vnikol91@rambler.ru

REFERENCES

1. Arbones Kh., Milrud P. *Chisla – osnova garmonii. Muzyka i matematika* [Numbers – the Foundation of Harmony. Music and Mathematics]. Moscow: De Agostini, 2014. 160 p.

2. Dolzhanskiy A. N. *Kratkiy muzykal'nyy slovar'* [Concise Musical Dictionary]. Leningrad: Muzgiz, 1955. 511 p.

3. Pavlyuchenko S. A. *Kratkiy muzykal'nyy slovar'* [Concise Musical Dictionary]. Moscow: Muzgiz, 1950.192 p.

4. *Pifagorov stroy* [The Pythagorean Tuning].
URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Пифагоров_строй (13.08.2020).

About the author:

Sergei S. Nikolsky, Ph.D. (Chemical Sciences) (190000, St. Petersburg, Russia), **ORCID: 0000-0002-4535-4254**, vnikol91@rambler.ru